Dimension Métrique et Coloration dans les graphes peu denses

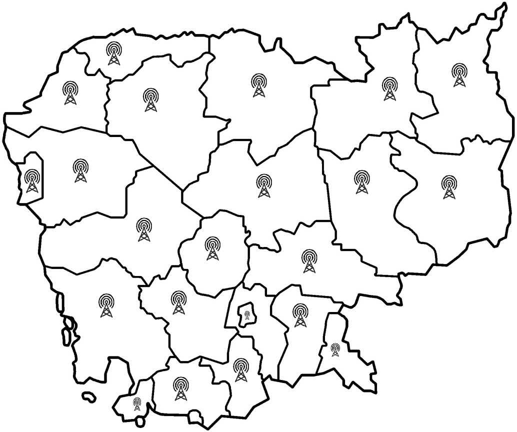
Quentin Deschamps

Nicolas Bousquet, Hamamache Kheddouci et Aline Parreau

LIRIS, Université Lyon 1

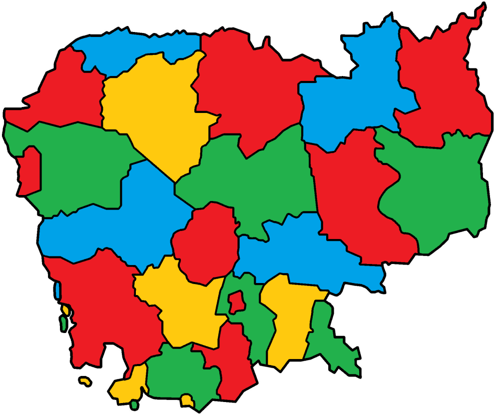
16 octobre 2023

Le réseau de communication



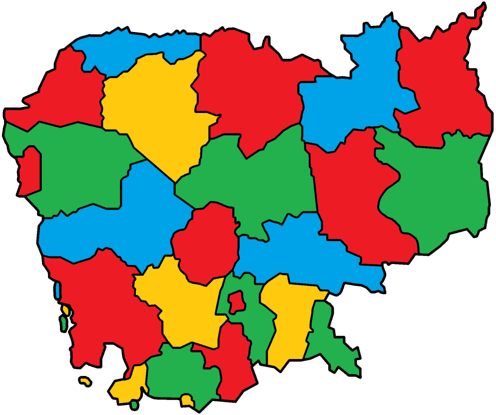
Le réseau de communication

- Jaune : 105.0
- Bleu : 102.2
- Vert : 104.5
- Rouge : 89.6

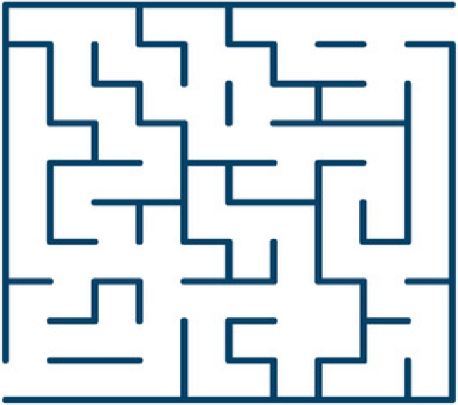


Le réseau de communication

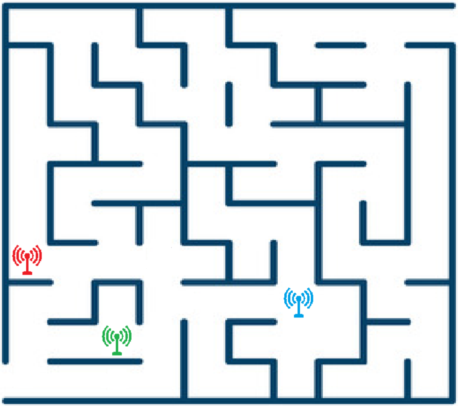
- But : Minimiser le nombre de couleurs.



Un robot dans un labyrinthe

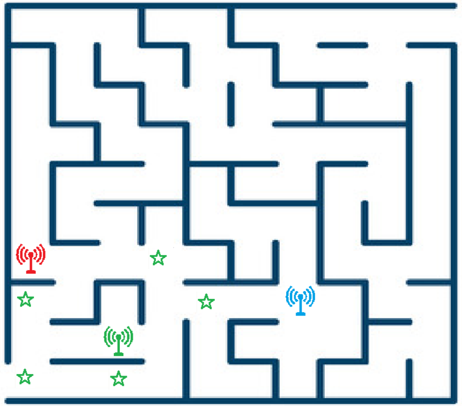


Un robot dans un labyrinthe



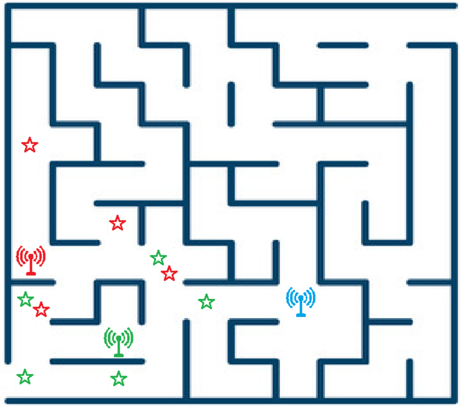
Un robot dans un labyrinthe

- Vert : distance 3



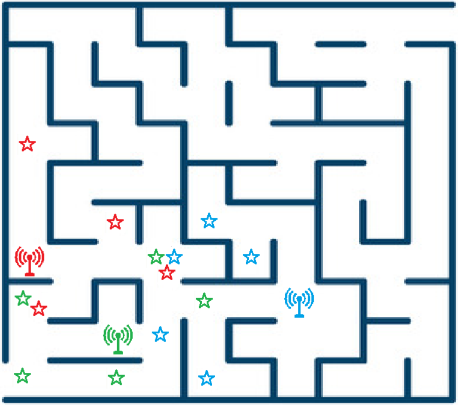
Un robot dans un labyrinthe

- Vert : distance 3
- Rouge : distance 3



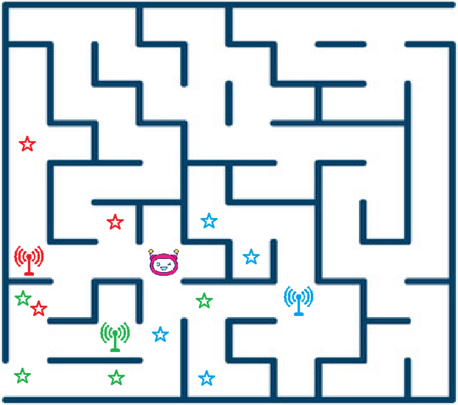
Un robot dans un labyrinthe

- Vert : distance 3
- Rouge : distance 3
- Bleu : distance 4



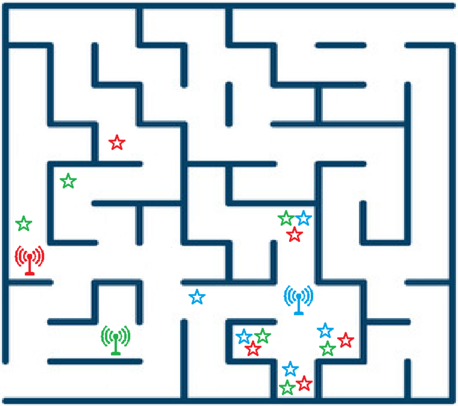
Un robot dans un labyrinthe

Trouvé !



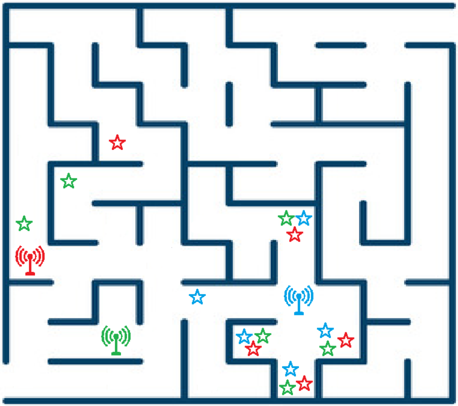
Un robot dans un labyrinthe

- Vert : distance 7
- Rouge : distance 8
- Bleu : distance 2



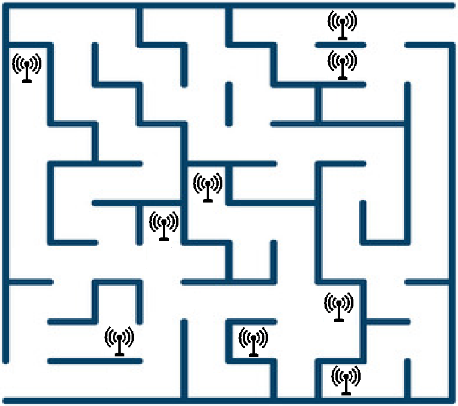
Un robot dans un labyrinthe

On ne sait toujours pas où est le robot.



Un robot dans un labyrinthe

- Comment placer les balises pour toujours être capable de trouver le robot ?
- Quel est le nombre minimal de balises ?

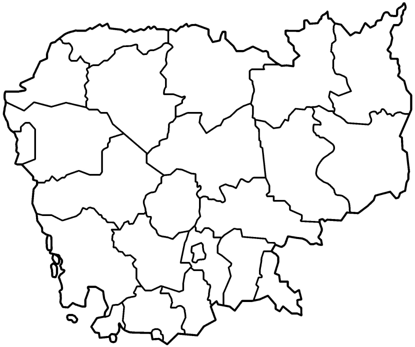


Points communs

- Problèmes de graphes

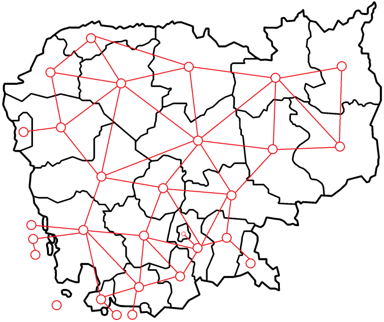
Points communs

- Problèmes de graphes



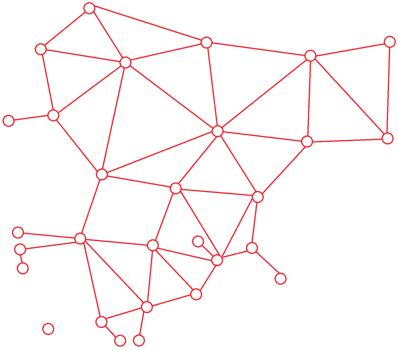
Points communs

- Problèmes de graphes



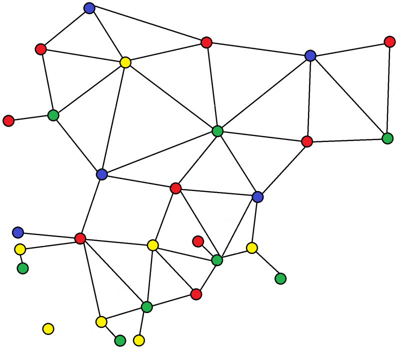
Points communs

- Problèmes de graphes



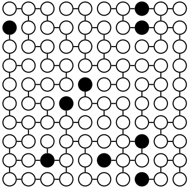
Points communs

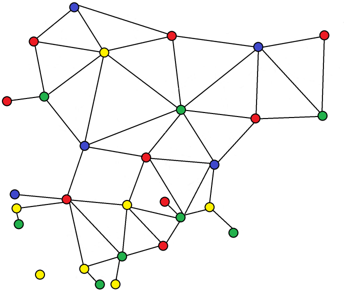
- Problèmes de graphes



Points communs

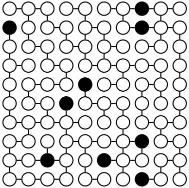
- Problèmes de graphes

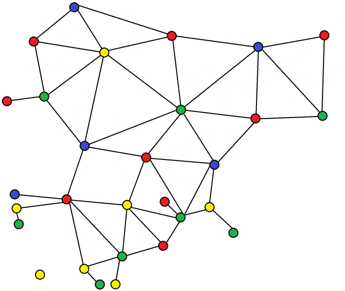




Points communs

- Problèmes de graphes

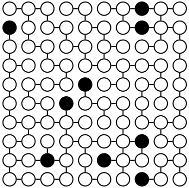


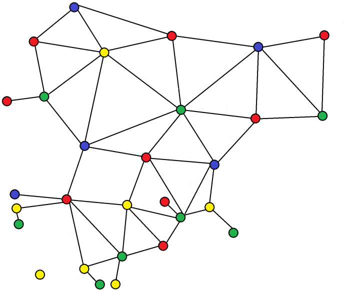


- Problèmes de minimisation.

Points communs

- Problèmes de graphes

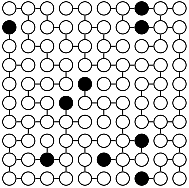


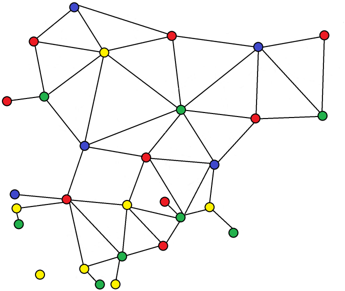


- Problèmes de minimisation.
- Problèmes difficiles, NP-difficiles.

Points communs

- Problèmes de graphes





- Problèmes de minimisation.
- Problèmes difficiles, NP-difficiles.
- Problèmes dans des graphes peu denses.

Graphes peu denses

Définition informelle

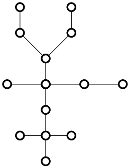
Une famille de graphes est peu dense si le nombre d'arêtes est linéaire en le nombre de sommets.

Graphes peu denses

Définition informelle

Une famille de graphes est peu dense si le nombre d'arêtes est linéaire en le nombre de sommets.

Arbres, au plus $n-1$ arêtes.



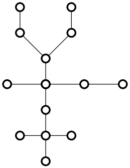
Graphes peu denses

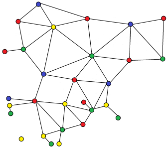
Définition informelle

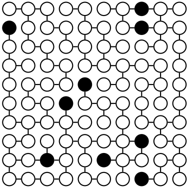
Une famille de graphes est peu dense si le nombre d'arêtes est linéaire en le nombre de sommets.

Arbres, au plus $n - 1$ arêtes.

Graphes planaires, au plus $3n - 6$ arêtes.

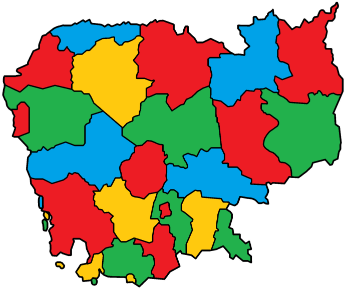


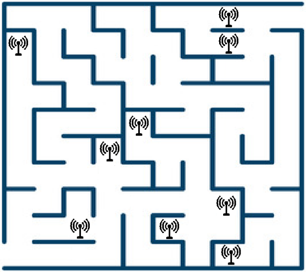




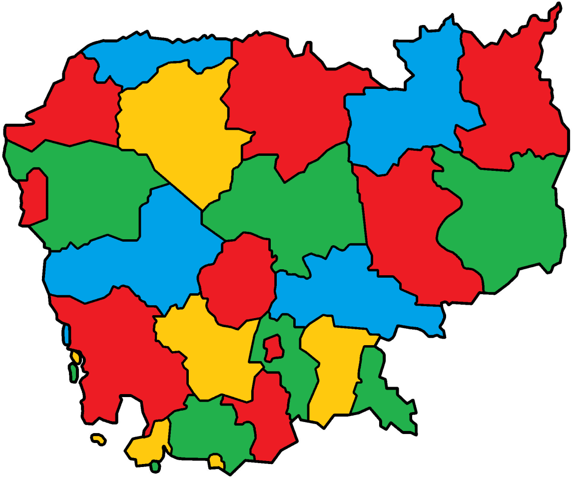
Deux approches différentes

Coloration	Dimension métrique
Approche structurelle Recherche de bornes	Approche algorithmique Étude de complexité

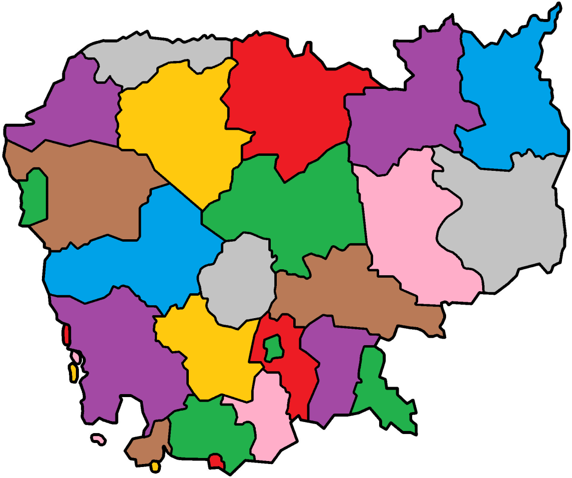




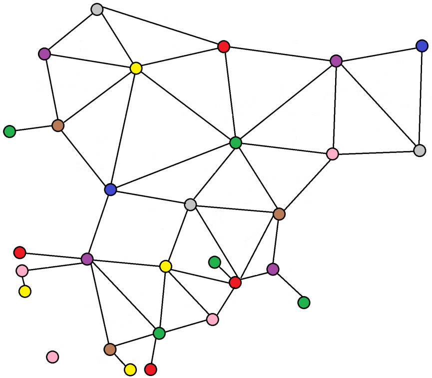
Coloration à distance 1



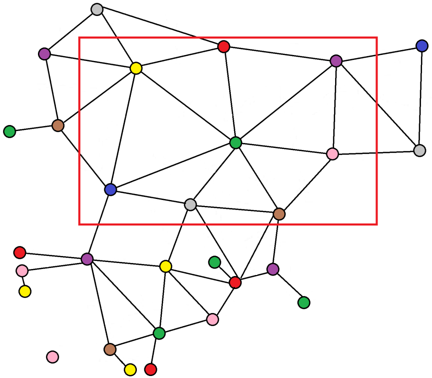
Coloration à distance 2



Coloration à distance 2

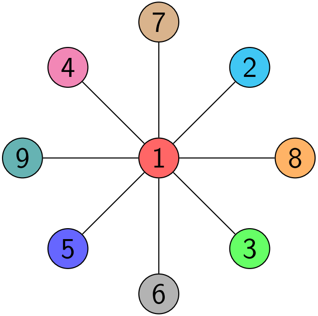


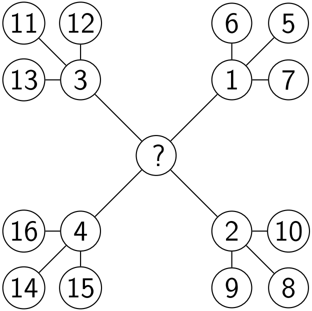
Coloration à distance 2



Le degré maximal Δ vaut 7.

Relation entre Δ et χ_2





$\chi_2(G) \geq \Delta + 1.$

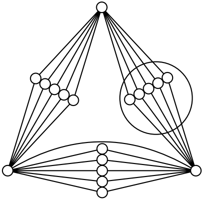
$\chi_2(G) \leq \Delta^2 + 1.$

La conjecture de Wegner

Conjecture Wegner (1977)

Soit G un graphe planaire de degré maximal Δ. Alors :

$$\chi_2(G) \leq \begin{cases} 7 & \text{si } \Delta = 3, \\ \Delta + 5 & \text{si } 4 \leq \Delta \leq 7, \\ \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1 & \text{si } \Delta \geq 8. \end{cases}$$



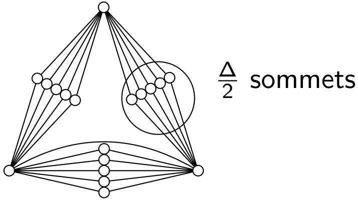
$\frac{\Delta}{2}$ sommets

La conjecture de Wegner

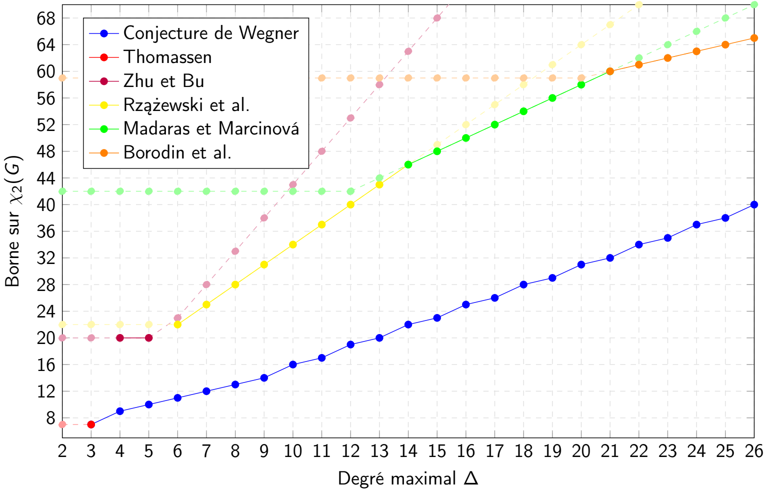
Conjecture Wegner (1977)

Soit G un graphe planaire de degré maximal Δ. Alors :

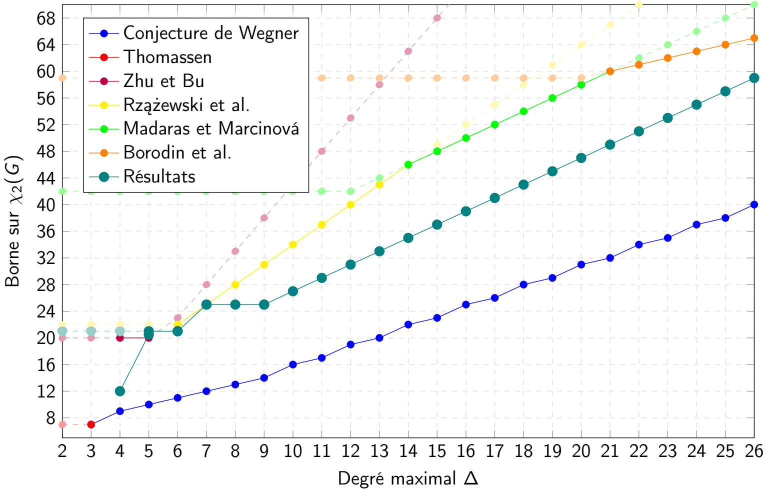
$$\chi_2(G) \leq \begin{cases} 7 & \text{si } \Delta = 3, \\ \Delta + 5 & \text{si } 4 \leq \Delta \leq 7, \\ \left\lfloor \frac{3\Delta}{2} \right\rfloor + o(\Delta) & \text{si } \Delta \geq 8. \end{cases}$$



État de l'art


Conjecture de Wegner
Thomassen
Zhu et Bu
Rzążewski et al.
Madaras et Marcinová
Borodin et al.
Borne sur $\chi_2(G)$
Degré maximal Δ
68
64
60
56
52
48
44
40
36
32
28
24
20
16
12
8
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

Contributions



Contributions

Théorème (Bousquet, Deschamps, De Meyer, Pierron)

Soit G un graphe planaire tel que $\Delta \geq 9$. Alors, $\chi_2(G) \leq 2\Delta + 7$.

Théorème (Bousquet, Deschamps, De Meyer, Pierron)

Soit G un graphe planaire tel que $\Delta \leq 4$. Alors, $\chi_2(G) \leq 12$.

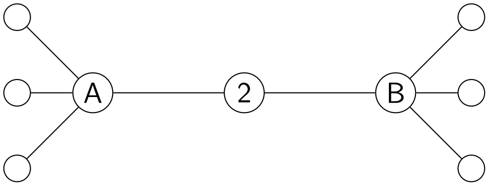
Méthode de déchargement

- Preuve par contradiction, G est un contre exemple minimal.
- Montrer que G ne contient pas certains sous-graphes, appelés configurations interdites.
- Donner des poids aux sommets et aux faces de G puis les déplacer pour obtenir une contradiction.

Une configuration interdite

Lemme

G ne contient pas de sommet de degré 2.



Une configuration interdite

Lemme

G ne contient pas de sommet de degré 2.

Une configuration interdite

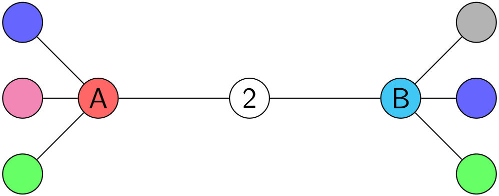
Lemme

G ne contient pas de sommet de degré 2.

Une configuration interdite

Lemme

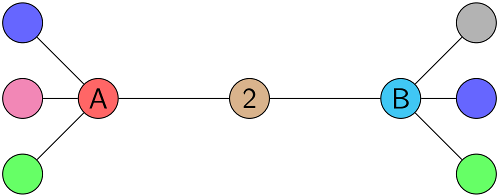
G ne contient pas de sommet de degré 2.



Une configuration interdite

Lemme

G ne contient pas de sommet de degré 2.



Gestion des poids

- Donner des poids aux faces et aux sommets de sorte que le poids total soit négatif.
  - Un sommet v reçoit un poids $c(v) = \deg(v) - 6$.
  - Une face f reçoit un poids $c(f) = 2\deg(f) - 6$.
  - La somme des poids est négative d'après la formule d'Euler.

Gestion des poids

- Donner des poids aux faces et aux sommets de sorte que le poids total soit négatif.
  - Un sommet v reçoit un poids $c(v) = \deg(v) - 6$.
  - Une face f reçoit un poids $c(f) = 2\deg(f) - 6$.
  - La somme des poids est négative d'après la formule d'Euler.
- Déplacer les poids entre les faces et les sommets.

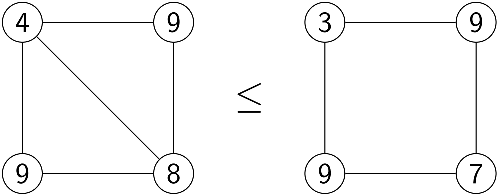
Gestion des poids

- Donner des poids aux faces et aux sommets de sorte que le poids total soit négatif.
  - Un sommet v reçoit un poids $c(v) = \deg(v) - 6$.
  - Une face f reçoit un poids $c(f) = 2\deg(f) - 6$.
  - La somme des poids est négative d'après la formule d'Euler.
- Déplacer les poids entre les faces et les sommets.
- Prouver que tous les éléments ont un poids positif.

Ordre sur les graphes

$G' < G$ si

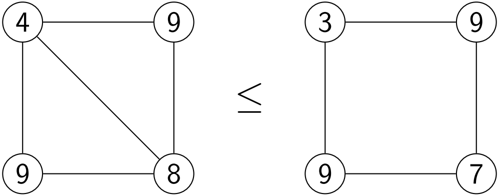
- $|V(G')| < |V(G)|$ ou
- $|V(G')| = |V(G)|$ et $|E(G')| > |E(G)|$.



Ordre sur les graphes

$G' < G$ si

- $|V(G')| < |V(G)|$ ou
- $|V(G')| = |V(G)|$ et $|E(G')| > |E(G)|$.



- On peut le voir comme une façon d'ajouter des configurations interdites.

Conséquence de l'ordre sur les sommets

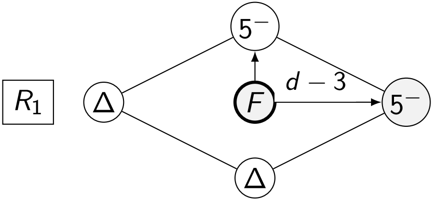
Lemme

Toute 4^+-face de G contient au plus 2 sommets de degré strictement inférieur à Δ.

Conséquence de l'ordre sur les sommets

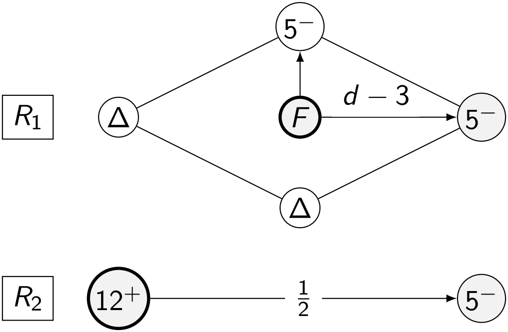
Lemme

Toute 4^{+}-face de G contient au plus 2 sommets de degré strictement inférieur à Δ.

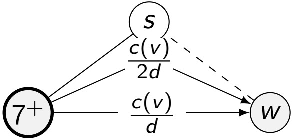


- Poids initial : $c(f) = 2\deg(f) - 6$.
- Règle : Une face donne la moitié de son poids aux sommets adjacents de degré au plus 5.
- Le poids final de la face est positif.

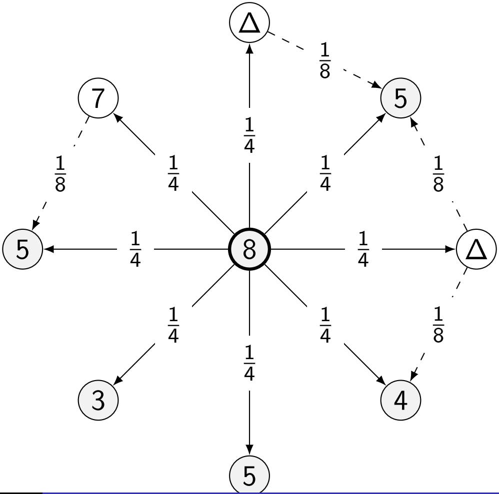
Exemple de règles de déplacement des poids



Exemple de règles de déplacement des poids



Rappel : poids initial
$c(v) = \deg(v) - 6$.

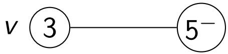


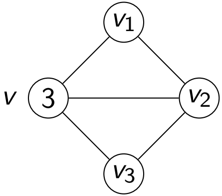
Sommets de faible degré

- Degré 1 ou 2 : Impossibles dans un contre-exemple minimal.

Sommets de faible degré

- Degré 1 ou 2 : Impossibles dans un contre-exemple minimal.
- Degré 3 : Des configurations interdites garantissent que le sommet est adjacent à des faces ou des sommets de haut degré.

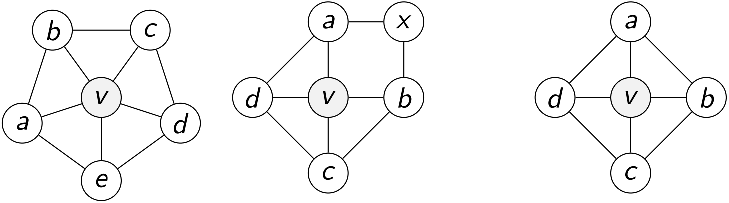




$\deg(v_i) \leq \min(10, \Delta)$ pour un certain $i \in \{1, 2, 3\}$.

Sommets de degré 4 ou 5

- Adjacent uniquement à des faces de petit degré.



- Le degré des sommets adjacents est suffisamment élevé.

Méthode de déchargement

- Preuve par contradiction, G est un contre exemple minimal.
- Montrer que G ne contient pas certains sous-graphes, appelés configurations interdites.
- Donner des poids aux sommets et aux faces de G puis les déplacer pour obtenir une contradiction.

Automatisation de la méthode de déchargement

Théorème (Bousquet, Deschamps, De Meyer, Pierron)

Soit G un graphe planaire de degré maximal $\Delta \leq 4$. Alors, $\chi_2(G) \leq 12$.

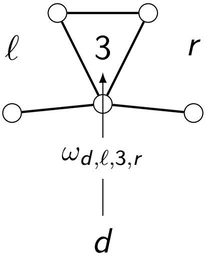
Automatisation de la méthode de déchargement

Théorème (Bousquet, Deschamps, De Meyer, Pierron)

Soit G un graphe planaire de degré maximal $\Delta \leq 4$. Alors, $\chi_2(G) \leq 12$.

- Preuve par déchargement trop complexe.
- Automatisation par deux sous-programmes.

Modélisation par un programme linéaire

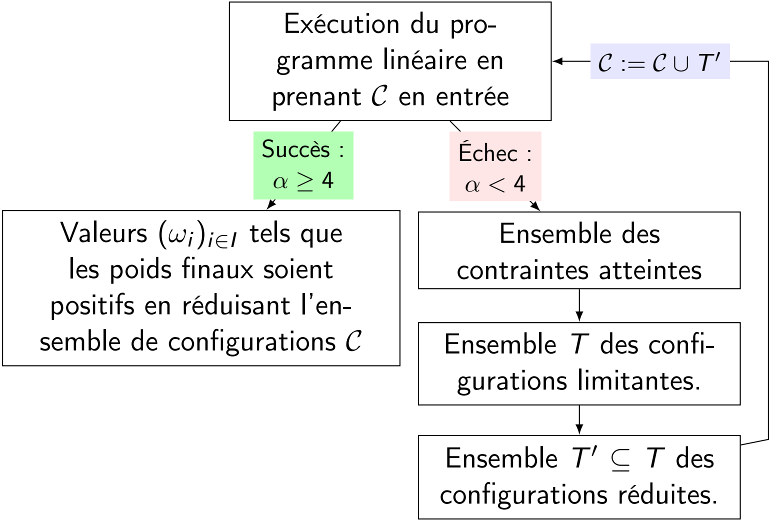


- Variables : poids transférés.
- Contraintes : poids final positif

$$(d-\alpha) - \sum_{i \in I} w_i \geq 0$$

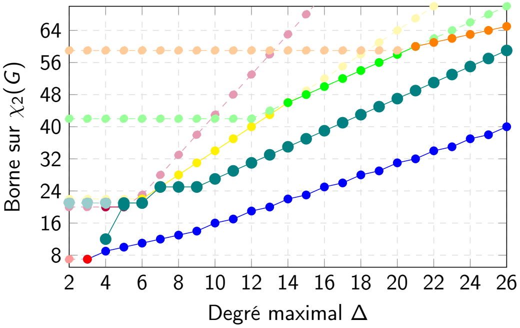
- Contraintes strictes : configurations interdites

Schéma de fonctionnement

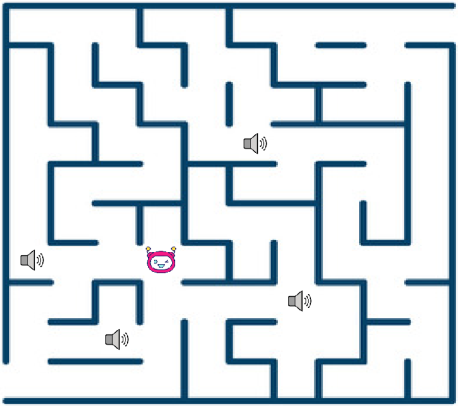


Perspectives

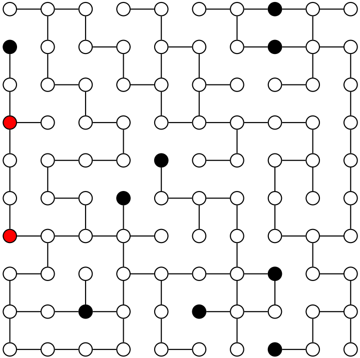
- Progresser vers la borne de Wegner.
- Améliorer la méthode d'automatisation et élargir son champ d'application.



Un robot dans un labyrinthe

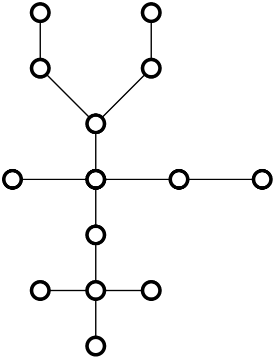


Définition

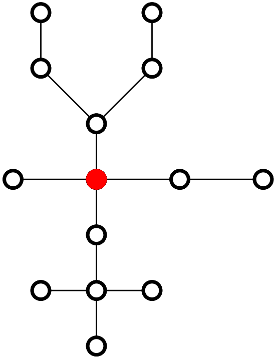


Ensemble résolvant Ensemble S de sommets tel que tous les vecteurs de distance à S soient différents.
Dimension métrique Taille minimale d'un ensemble résolvant.

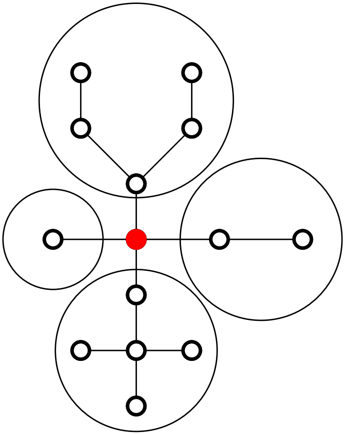
Les arbres et les sommets séparateurs



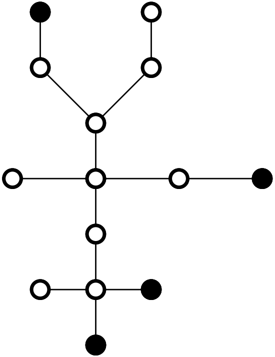
Les arbres et les sommets séparateurs



Les arbres et les sommets séparateurs



Les arbres et les sommets séparateurs



Les sommets séparateurs

- Permet de calculer la dimension métrique dans les arbres.

Les sommets séparateurs

- Permet de calculer la dimension métrique dans les arbres.
- Généraliser l'idée :

Les sommets séparateurs

- Permet de calculer la dimension métrique dans les arbres.
- Généraliser l'idée :
  - Petits séparateurs : graphes de petite largeur arborescente

Les sommets séparateurs

- Permet de calculer la dimension métrique dans les arbres.
- Généraliser l'idée :
  - Petits séparateurs : graphes de petite largeur arborescente
    - NP-difficile pour les graphes de largeur arborescente 24 (Li et Pilipczuk, 2022)
    - Linéaire dans les graphes de largeur arborescente 1 (les arbres) (Slater, 1975)
    - Ouvert pour les valeurs intermédiaires.

Les sommets séparateurs

- Permet de calculer la dimension métrique dans les arbres.
- Généraliser l'idée :
  - Petits séparateurs : graphes de petite largeur arborescente
    - NP-difficile pour les graphes de largeur arborescente 24 (Li et Pilipczuk, 2022)
    - Linéaire dans les graphes de largeur arborescente 1 (les arbres) (Slater, 1975)
    - Ouvert pour les valeurs intermédiaires.
  - Séparateurs structurés
    - Tous les séparateurs sont des cliques : graphes chordaux.
    - NP-difficile dans les graphes d'intervalles (et les chordaux) (Foucaud+, 2017)

Résultat

Théorème (Bousquet, Deschamps, Parreau)

La dimension métrique peut se calculer en temps polynomial dans les graphes chordaux de largeur arborescente bornée.

Résultat

Théorème (Bousquet, Deschamps, Parreau)

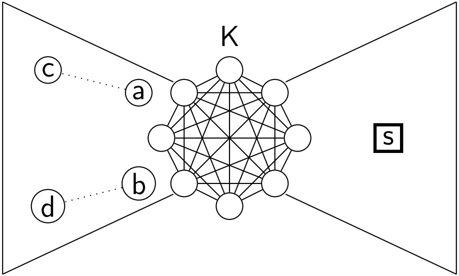
La dimension métrique peut se calculer en temps polynomial dans les graphes chordaux de largeur arborescente bornée.

Théorème (Bousquet, Deschamps, Parreau)

La dimension métrique est FPT paramétrée par la largeur arborescente dans les graphes chordaux.

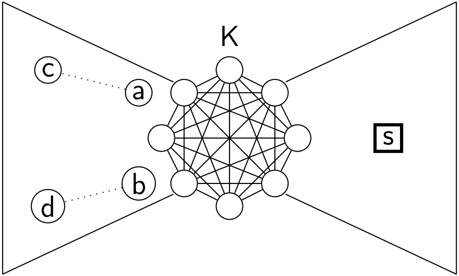
- Il existe un algorithme de complexité $poly(n).f(\omega)$ où ω est la largeur arborescente du graphe.

Utilisation des séparateurs chordaux



- Si s résout (a, b), alors s résout (c, d).
- Si $|d(a, K) - d(c, K)| \geq 2$ alors s résout (a, c).

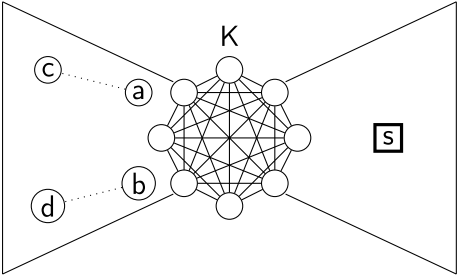
Utilisation des séparateurs chordaux



- Si s résout (a, b), alors s résout (c, d).
- Si $|d(a, K) - d(c, K)| \geq 2$ alors s résout (a, c).

Il est suffisant de résoudre les paires de sommets proche de K.

Utilisation des séparateurs de petite taille

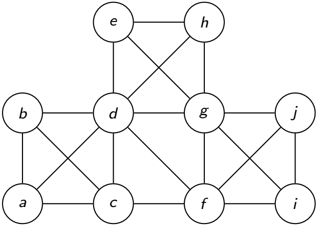


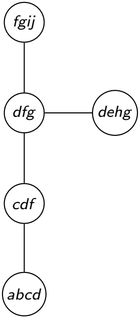
(4,5,4,5,5,5,4,4)

(0,1,0,1,1,1,0,0)

- s résout $(a,b) \iff d(a,s) \neq d(b,s)$.
- Pour savoir si s résout (a,b), on s'intéresse aux sommets de K les plus proche de s.
- Représentation des sommets par des vecteurs binaires.

Décomposition arborescente



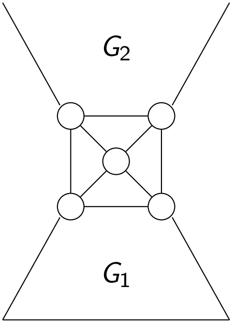


- $\bigcup_{i \in V(T)} X_i = V(G)$.
- Pour chaque arête $xy \in E(G), \exists i \in V(T), x \in X_i$ et $y \in X_i$.
- Pour chaque $x \in V(G)$, l'ensemble $\{i | x \in X_i\}$ induit une sous-arbre connexe de T.

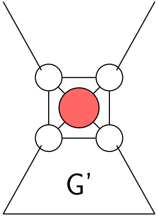
Informations à retenir

Informations à retenir :

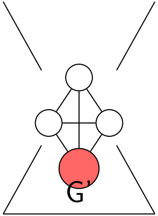
- Sommets de la solution dans G_1.
- Sommets nécessaires dans G_2.
- Paires proches de la clique résolues.



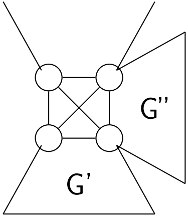
Décomposition arborescente



Noeud d'introduction

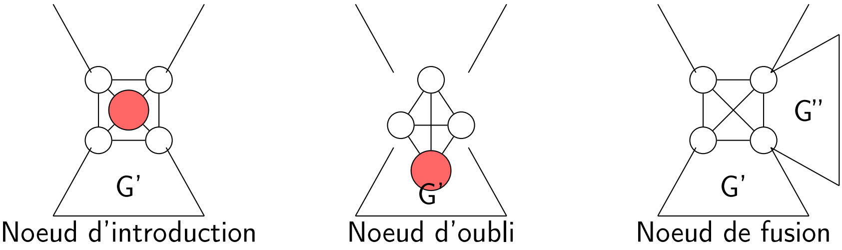


Noeud d'oubli



Noeud de fusion

Décomposition arborescente



Maintien de deux propriétés par programmation dynamique :

- Toute paire de sommets sous la clique est résolue.
- Mémoriser les paires de sommets proches de la clique qui sont résolus.

Conclusion

- Complexité : $O(n^3 + n^2 \cdot f(\omega))$.

Conclusion

- Complexité : $O(n^3 + n^2 \cdot f(\omega))$.
- Une méthode similaire peut-elle fonctionner pour les graphes dont les séparateurs ont diamètre borné ?

Conclusion

- Complexité : $O(n^3 + n^2 \cdot f(\omega))$.
- Une méthode similaire peut-elle fonctionner pour les graphes dont les séparateurs ont diamètre borné ?
- Algorithme en temps polynomial pour les graphes de largeur arborescente 2 ?
  - Existe pour les 2-arbres complets.
  - Existe pour les graphes planaires extérieurs.

Résultats

- *Complexité de la dimension métrique dans les graphes chordaux*, Bousquet, Deschamps, Parreau, WG 2023
- *Dimension métrique, nombre cyclomatique et nombre zéro-forçant*, Bousquet, Deschamps, Parreau, Pelayo, EuroComb 2021
- *Coloration à distance* 2 *dans les graphes planaires de degré au moins* 6, Bousquet, Deschamps, De Meyer, Pierron, Discrete Mathematics, 2023
- *Coloration à distance* 2 *par méthode automatisée*, Bousquet, Deschamps, De Meyer, Pierron, SIDMA 2023
- *Recoloration de graphe planaire par changements de Kempe*, Deschamps, Feghali, Kardoš, Legrand-Duchesne, Pierron, SIDMA 2023